問題徵答

黃光明 提供

令 R 爲 $\{1, 2, \cdots, 2r\}$ 的集合。設有 r 族 $F_1, \cdots, F_r$, 每一族含 n 對 R 的元素 (可以重複如 $\{1,2\}, \{1,2\}$, 也可以相交如 $\{1,2\}, \{1,3\}$), 但每一 R 元素只出現在 n 對中。

猜測: 令 A 爲一 r 行 $2n$ 列的陣列。我們一定可以把 $F_i : i = 1, \cdots, r$, 的 n 對適當的放在 A 的第 i 行的 $2n$ 個空格中使得 R 中的每一元素在 A 的每一列最多出現一次。

例: $r = 3$, $n = 4$, $F_1 = (\{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,3\})$, $F_2 = (\{4,2\}, \{1,6\}, \{3,5\}, \{5,6\})$, $F_3 = (\{5,6\}, \{6,3\}, \{5,4\}, \{2,1\})$。則 A 的一種排列是

14	23	24	13				
35	16	56	42				
	54		56	63	21		

雖然在上例中我們只用了 6 列少於 $2n = 8$ 列, 但總有需要 $2n$ 列的例子存在。譬如

12	34	12	34				
56	56			13	24		
		56	56			14	23

討論: 此問題出於一電訊交換網路的設計。$n = 2, 3$ (任意 r) 的情形已證。